

## УДК 621.833



**Б.О. Ткаченко,**  
к.т.н., доцент,  
Одесский националь-  
ный политехнический  
университет



**А.В.Баланюк,**  
аспирант,  
Одесский националь-  
ный политехнический  
университет  
e-mail:  
anna.balanyuk@mail.ru

## ДИНАМИКА РАСТАЧИВАНИЯ ОТВЕРСТИЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Б.О. Ткаченко, А.В. Баланюк. Мо-  
делирование колебаний при растачива-  
нии отверстий с учетом переменной же-  
сткости технологической системы.* В  
качестве методологии исследования был  
применен метод математического модели-  
рования горизонтально–расточной опера-  
ции с учетом переменной жесткости техно-  
логической системы.

Основными результатами работы является  
прикладная программа, позволяющая на  
этапе проектирования определить как раци-  
ональные режимы резания, так и конструк-  
тивные параметры расточного инструмента.

*В.О Tkachenko, A.V Balanyuk.  
Modeling fluctuations in boring holes with  
the variable stiffness of technological sys-  
tem..* As a research methodology has been  
applied method of mathematical modeling  
of horizontal boring operation with the  
variable stiffness of technological system.

The main result is an application that allows  
the design phase to determine how rational  
cutting conditions and design parameters of  
the boring tool.

**Введение.** При обработке протяженных отверстий на горизонтально-расточных станках расточными оправками возможно появление погрешностей обработки, связанных с причинами различного характера. Одной из существенных причин появления погрешности является переменная жесткость технологической системы в процессе обработки детали. Указанный фактор приводит к появлению погрешностей формы, как в осевом сечении детали (седлообразность, конусность), так и в радиальном (отклонение от округлости).

Анализ исследований и публикаций

Для повышения жесткости обработки применяются различные технологические методы и подходы: применение расточных резцов специальных конструкций, режущих пластинок из прогрессивных материалов, использование борштанг с виброгасителями колебаний. Однако единого подхода, который позволил бы установить соответствия между режимами

резания, конструктивными размерами расточных оправок, схемами растачивания, прочностными характеристиками материалов борштанги и детали с образующимися погрешностями обработки не существует.

Таким образом, цель научного исследования, разработка математической модели, которая описывала бы погрешности, появляющиеся при растачивании, включающей режимные, конструктивные и прочностные факторы, является актуальной.

Изложение основного материала

Одной из наиболее применяемых схем является схема растачивания в кондукторных плитах при шарнирном соединении расточной оправки со шпинделем станка, с применением одного или двух расточных резцов [1].

Конструктивная схема расточной оправки с использованием двух расточных резцов приведена на рис. 1.

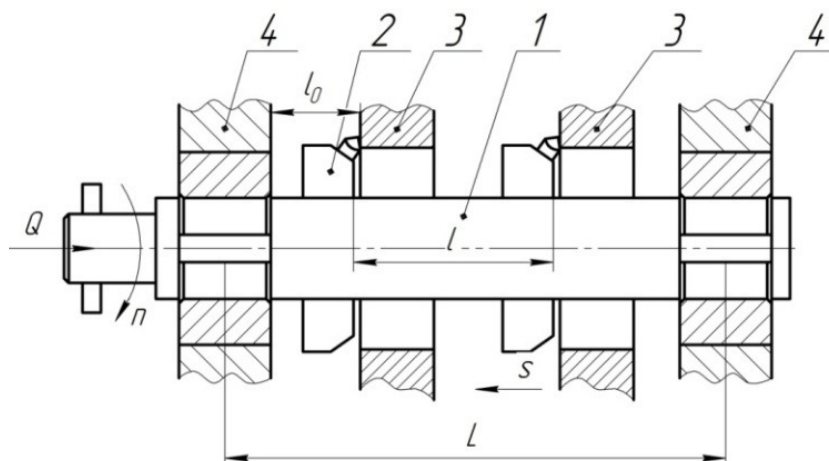


Рис. 1. Схема растачивания в кондукторах при шарнирном соединении расточной оправки со шпинделем станка: 1 – расточная оправка; 2 – расточной блок; 3 – деталь; 4 – кондукторная плита.

Расстояние между кондукторными плитами –  $L$ , расстояние между резцами на оправке  $l$ . Оправка находится под воздействием сил резания  $F_{y1}, F_{z1}, F_{y2}, F_{z2}$ , действующих на резцы 1 и 2 (рис. 2), расположенные в различных плоскостях под углом  $\alpha$  друг к другу.

Указанные силы непрерывно изменяют свое положение в пространстве, что обуславливает возникновение колебательного процесса. Суммарные составляющие возбуждающих сил в проекции на оси  $OY$  и  $OZ$  описываются формулами (1):

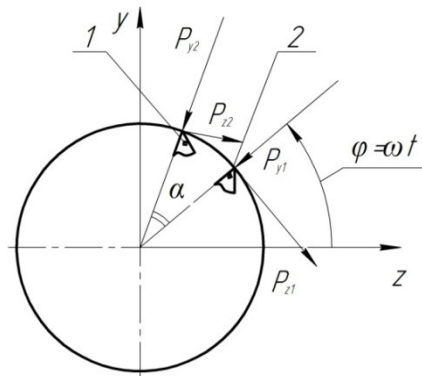


Рис. 2. Схема сил действующих на режущий инструмент

$$\begin{cases} F_{y2} = -P_{y2} \sin(\alpha + \omega t) - P_{z2} \cos(\alpha + \omega t) \\ F_{z2} = P_{z2} \sin(\alpha + \omega t) - P_{y2} \cos(\alpha + \omega t) \\ F_{y1} = -P_{y1} \sin \omega t - P_{z1} \cos \omega t \\ F_{z1} = P_{z1} \sin \omega t - P_{y1} \cos \omega t \end{cases} \quad (1)$$

где  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – угловая скорость вращения расточной борштанги;

$$f = \frac{n}{60};$$

$t$  – время обработки.

Расчетная схема задачи (рис. 3) представляет собой двухмассовую колебательную систему, в которой положение масс  $m_{прив.1}$  и  $m_{прив.2}$  относительно оси  $AB$  изменяется с течением времени по закону:

$$x(t) = l_0 + S \cdot n \cdot t \quad (2)$$

где  $l_0$  – расстояние от кондукторной плиты до детали.

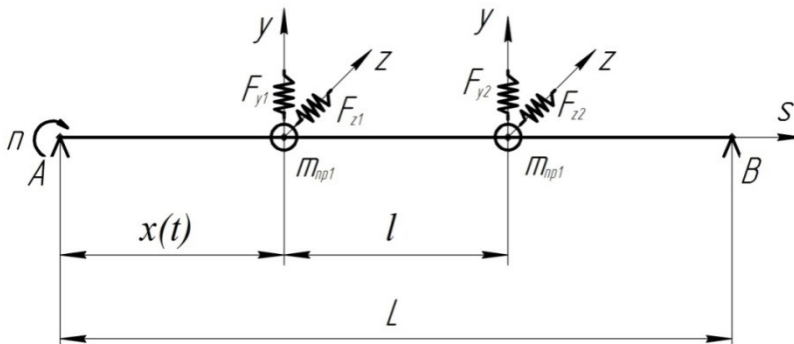


Рис. 3. Расчетная схема

Движение механической системы описывается следующими дифференциальными уравнениями [3]:

$$\begin{cases} y_1 + m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1(t) + m_2 \delta_{12} \ddot{y}_2(t) = \delta_1 F_{y1} + \delta_1 F_{y2} \\ y_2 + m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1(t) + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2(t) = \delta_2 F_{y1} + \delta_2 F_{y2}, \end{cases} \quad (3)$$

$$y_1(0) = 0; \dot{y}_1(0) = 0; y_2(0) = 0; \dot{y}_2(0) = 0,$$

$$\begin{cases} z_1 + m_1 \delta_{11} \ddot{z}_1(t) + m_2 \delta_{12} \ddot{z}_2(t) = \delta_1 F_{z1} + \delta_1 F_{z2} \\ z_2 + m_1 \delta_{21} \ddot{z}_1(t) + m_2 \delta_{22} \ddot{z}_2(t) = \delta_2 F_{z1} + \delta_2 F_{z2}, \end{cases} \quad (4)$$

$$z_1(0) = 0; \dot{z}_1(0) = 0; z_2(0) = 0; \dot{z}_2(0) = 0,$$

где  $\delta_{i1}; \delta_{i2}$  – перемещения по направлению силы  $X_i$ , вызванные единичными силами  $X_1, X_2$ , приложенными в точках нахождения соответствующих масс;

$\delta_i F_{y1}, \delta_i F_{y2}, \delta_i F_{z1}, \delta_i F_{z2}$  – перемещения по направлению  $X_i$  от соответствующей вибрационной нагрузки  $F_{y1}, F_{y2}, F_{z1}, F_{z2}$ .

Учитывая одинаковую жесткость в направлении осей  $Y$  и  $Z$ , указанные перемещения в механической системе одинаковы и определяются методом умножения эпюр Верещагина (рис. 4).

Таким образом, решение задачи сводится к решению систем уравнений (3) и (4) где:

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{(L-x)^2 x^2}{L},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{(l-x)^2 (L-l-x)^2}{L},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{(L-l-x)}{E \cdot I \cdot L^2} \left[ x^3 (L-x) + (L-l-x)^2 \cdot x \cdot (l+x) + l(L-l-x) \left( \frac{l}{2} + x \right) x + \frac{1}{2} l^2 x \left( \frac{1}{3} l + x \right) \right],$$

$$\delta_{11} F_{y1} = \frac{1}{3} \frac{F_{y1}}{E \cdot I} \frac{(L-x)^2}{L} x^2, \quad (5)$$

$$\delta_{22} F_{y2} = \frac{1}{3} \frac{F_{y2}}{E \cdot I \cdot L} (l+x)^2 (L-l-x)^2,$$

$$\delta_{12}F_{y_2} = \frac{1}{E \cdot I} F_{y_2} \frac{(L-l-x)}{L^2} \left[ \begin{array}{l} x^3(L-x) + (L-l-x)^2 \cdot x \cdot (l+x) + \\ l(L-l-x)\left(\frac{l}{2} + x\right)x + \frac{1}{2}l^2x\left(\frac{1}{3}l+x\right) \end{array} \right],$$

$$\delta_{21}F_{y_1} = \frac{1}{E \cdot I \cdot L^2} F_{y_1} (L-l-x) \left[ \begin{array}{l} x^3(L-x) + (L-l-x)^2 \cdot x \cdot (x+l) + \\ x(L-l-x)\left(\frac{l}{2} + x\right)l + \frac{1}{2}l^2x\left(\frac{1}{3}l+x\right) \end{array} \right],$$

$$\delta_{11}F_{z_1} = \frac{1}{3} \frac{F_{z_1}}{E \cdot I} \frac{(L-x)^2}{L} x^2,$$

$$\delta_{21}F_{z_2} = \frac{1}{3} \frac{F_{z_2}}{E \cdot I \cdot L} (l+x)^2 (L-l-x)^2,$$

$$\delta_{12}F_{z_2} = \frac{1}{E \cdot I} F_{z_2} \frac{(L-l-x)}{L^2} \left[ \begin{array}{l} x^3(L-x) + (L-l-x)^2 \cdot x \cdot (l+x) + \\ l(L-l-x)\left(\frac{l}{2} + x\right)x + \frac{1}{2}l^2x\left(\frac{1}{3}l+x\right) \end{array} \right],$$

$$\delta_{21}F_{z_1} = \frac{1}{E \cdot I \cdot L^2} F_{z_1} (L-l-x) \left[ \begin{array}{l} x^3(L-x) + (L-l-x)^2 \cdot x \cdot (x+l) + \\ x(L-l-x)\left(\frac{l}{2} + x\right)l + \frac{1}{2}l^2x\left(\frac{1}{3}l+x\right) \end{array} \right],$$

где  $E$  – модуль упругости материала расточной оправки,  
 $I$  – момент инерции сечения оправки относительно оси  
 $I = 0,049d^4$ .

Особенностью решаемой задачи является наличие переменных коэффициентов в системе дифференциальных уравнений (3) и (4). Поэтому для решения был применен численный метод – метод конечных разностей. Решая систему уравнений, например, (3) относительно вторых производных, получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{y}_1(t) = \frac{m_2 \delta_{22} (\delta_{11} F_{y_1} + \delta_{12} F_{y_2} - y_1(t)) - m_2 \delta_{12} (\delta_{21} F_{y_1} + \delta_{22} F_{y_2} - y_2(t))}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

$$\ddot{y}_2(t) = \frac{m_1 \delta_{11} (\delta_{21} F_{y_1} + \delta_{22} F_{y_2} - y_2(t)) - m_1 \delta_{21} (\delta_{11} F_{y_1} + \delta_{12} F_{y_2} - y_1(t))}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

(6)

Производные второго порядка аппроксимируются конечными разностями [2]:

$$\ddot{y}_1(t) \approx \frac{Y_1(t+h) - 2Y_1(t) + Y_1(t-h)}{h^2}$$

$$\ddot{y}_2(t) \approx \frac{Y_2(t+h) - 2Y_2(t) + Y_2(t-h)}{h^2}$$
(7)

где  $Y_1, Y_2$  – сеточная функция;  
 $h$  – шаг сетки.

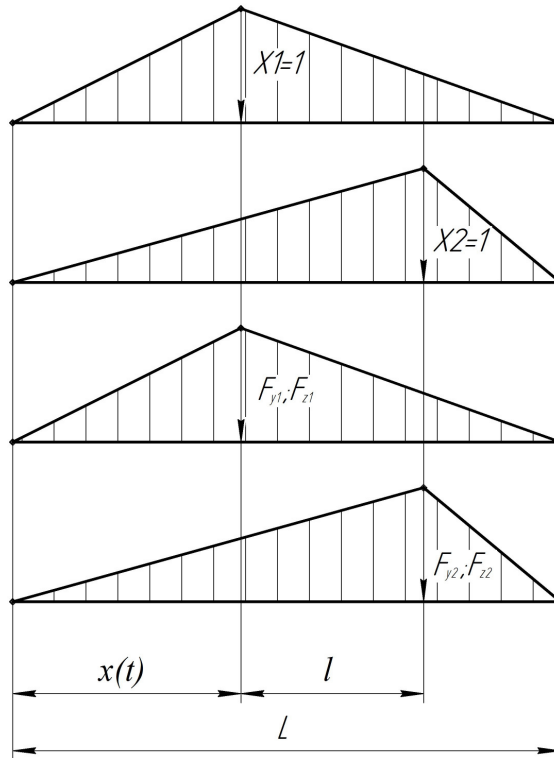


Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов от единичных сил и вибрационной нагрузки

Причем из начальных условий задачи следует:

$$Y_1(0) = 0 \quad Y_2(0) = 0$$

$$Y_1(h) = 0 \quad Y_2(h) = 0$$

Для упрощения записи системы уравнений (6), вводим обозначения следующих переменных величин:

$$\begin{aligned}
 \frac{m_2 \delta_{22}}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} &= A(t), \\
 \frac{m_2 \delta_{12}}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} &= B(t), \\
 \frac{m_1 \delta_{11}}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} &= C(t), \\
 \frac{m_1 \delta_{21}}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} &= D(t), \\
 \delta_{11} F_{y1} + \delta_{12} F_{y2} &= R(t), \\
 \delta_{21} F_{y1} + \delta_{22} F_{y2} &= E(t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда, получим следующую разностную аппроксимацию системы уравнений (6)

$$\begin{aligned}
 Y_1(t+h) &= h^2 \cdot A(t) \cdot (R(t) - Y_1(t)) - h^2 \cdot B(t) \cdot (E(t) - Y_2(t)) + 2Y_1(t) - Y_1(t-h) \\
 Y_2(t+h) &= h^2 \cdot C(t) \cdot (E(t) - Y_2(t)) - h^2 \cdot D(t) \cdot (R(t) - Y_1(t)) + 2Y_2(t) - Y_2(t-h)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Результатом работы является разработанная прикладная программа, для определения перемещений  $Y_1(t)$  и  $Y_2(t)$  блок-схема, которой приведена на рисунке 5.

Программа работает следующим образом: по команде запуска осуществляется ввод исходных данных задачи  $Y_1(0) = 0; Y_1(h) = 0; Y_2(0) = 0; Y_2(h) = 0$  (блок №1 - №4). Далее задается шаг решаемой задачи (сетки) (блок №5), по формулам (8) вычисляются переменные коэффициенты (блок №7). Затем рассчитываются, перемещения  $Y_1$  и  $Y_2$  в заданный момент времени  $t$ .

Производится табулирование функции  $Y_1$  и  $Y_2$  (блоки №8 и №9). Переменная задачи  $t$  увеличивается на шаг  $h$  (блок №11).

Сохраняются значения сеточной функции в предшествующих расчетных точках (блок №12 - №13), для функции  $Y_1$ , а также для функции  $Y_2$  блок № 14 – №15.

Далее по программе осуществляется сравнение с заданной величиной времени (время обработки) в случае, если условия блока №15 не выполняются, программа завершается.

Математическое моделирование колебаний на основе решений системы уравнений (3) и (4) позволяет назначить рациональные режимы резания  $S$  и  $v$  при растачивании длинных отверстий небольшого диаметра на горизонтально расточных станках на этапе проектирования технологического процесса. Это, в свою очередь, позволит повысить точность горизонтально-расточной операции с применением расточных оправок описанной конструкции.

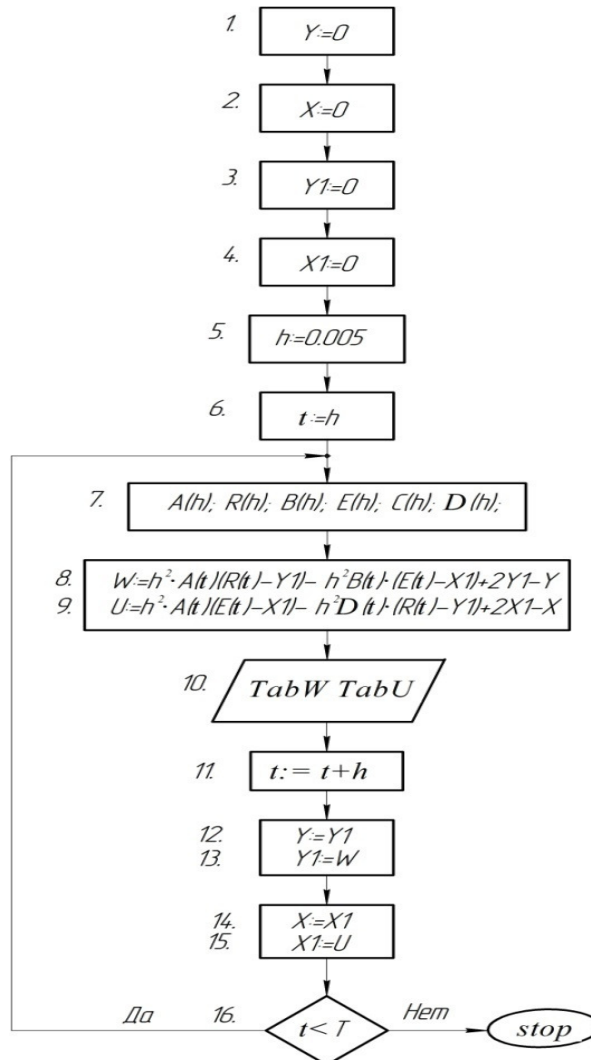


Рис. 5. Блок схема решений системы уравнений



**Выводы:**

1. На основе расчета определяются динамические параметры системы: резонансные амплитуды колебаний, собственные частоты и значения переменной жесткости в технологической системе.
2. Исследовано влияние взаимного расположения резцов на уровень колебаний инструмента.
3. Определены параметры технологической системы, обеспечивающие эффективное уменьшение погрешностей формы отверстия в продольном и поперечном сечениях.

**Литература**

1. П.П. Мельничук, А.И. Боровик, П.А. Линчевский. Технология машиностроения – Житомир 2005г., 898 с.
2. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. – Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – XVI 664 с. ISBN 5-94057-055-0 ISBN 5-94057-056-9 (часть I)
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Выш. школа, 2009. – 408 с., ил. ISBN 978-5-93972-755-6

*Надійшла до редакції 24.01.2015*