УДК 519.865.5



Л.М. Любчик,
д.т.н., професор,
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
lyubchik.leonid@gmail.com

Г.Л. Гринберг,
к.т.н., доцент,
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
glngrinberg@gmail.com

Е.Л. Любчик,
студент,
Ізраїльський технологічний інститут «Техніон»
el9619@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ ІНВЕСТОРА НА ФІНАНСОВОМУ РИНКУ

Л.М. Любчик, Г.Л. Гринберг, Е.Л. Любчик. Моделювання оптимальної стратегії інвестора на фінансовому ринку. Розглянута задача побудови оптимальної динамічної стратегії формування портфеля інвестора. Визначено оптимальні параметри розподілу капіталу, що характеризують структуру портфеля інвестора. Проведено комп’ютерне статистичне моделювання оптимальної поведінки інвестора на фінансовому ринку.

L.M. Lyubchyk, G.L. Grinberg, Ye. L. Lyubchyk. Optimal investor strategy modeling in financial market. The problem of optimal dynamic strategy design for investor portfolio is considered. The optimal capital allocation parameters that characterize the structure of the investor portfolio are found. A statistical computer simulation of optimal behavior of investors in the financial market is performed.

Вступ. У сучасній фінансовій математиці важливу роль відіграє задача побудови оптимальної стратегії інвестора з метою отримання максимального прибутку [1-3]. Для побудови свого портфелю інвестор може використовувати як основні безризикові та ризикові фінансові інструменти, такі як банківські рахунки та акції, так і похідні фінансові інструменти, наприклад опціони [4,5].

Побудова оптимального портфелю – це оптимізаційна задача, розв'язання якої потребує використання відповідної математичної моделі фінансового ринку. У математичній економіці докладно розглядалась задача побудови статичного портфелю інвестора [3,4], але в значно меншій мірі розглядалась задача побудови оптимального динамічного портфелю, актуальність якої обумовлена тим, що вартості активів звичайно змінюються у часі [6].

При моделюванні еволюції ціни на фінансові активи доводиться враховувати велику кількість випадкових чинників, саме тому при моделюванні фінансових ринків важливу роль відіграють стохастичні методи і важливим є вивчення відповідних стохастичних моделей динаміки вартості активів. У роботах Кокса, Росса і Рубінштейна описана так звана модель *(B, S)*-ринку [7], що найбільш підходить для задачі побудови динамічного портфелю. Пізніше Блек і Шоулз використовували рівняння Л. Башельє в моделі *(B, S)*-ринку [8].

Мета даної роботи – побудувати математичну модель формування оптимальної динамічної стратегії інвестора на фінансовому ринку, що оптимізує критерій, який враховує середній прибуток та ризик інвестора. Для опису фінансового ринку використовується дискретна модель *(B, S)*-ринку [4,7].

Оптимізація стратегії інвестора на *(B, S)*-ринку. Будемо розглядати *(B, S)*-ринок, який складається з двох активів: банківського рахунку *B* ("безризиковий" актив) і акцій *S* ("ризиковий" актив). Розглядається дискретна модель формування оптимальної стратегії, причому кожен момент дискретного часу *i* пов'язаний зі зміною цін активів B_i та S_i. На кожному кроці моделі інвестор приймає рішення про покупку або продаж акції та про вкладення капіталу на депозит банківського рахунку. При цьому на нульовому кроці він бере на себе платіжне зобов'язання f_n, яке має забезпечити до певного терміну *n*.

Припустимо, що інвестор в момент часу *i* на *(B, S)*-ринку має β_i банківських рахунків, вартість яких дорівнює B_i , і γ_i акцій, вартістю S_i кожна. Таким чином, портфель цінних паперів утворюється при здійсненні інвестором фінансових операцій в момент *i-1* відповідно до певної стратегії розподілу капіталу $\pi_i = (\beta_i, \gamma_i)$.

Тоді капітал інвестора буде представлений у вигляді:

$$X_i = \beta_i B_i + \gamma_i S_i$$

В момент часу *i* з метою отримання прибутку на свій капітал інвестор перетворює портфель $\pi_i = (\beta_i, \gamma_i)$ на новий портфель $\pi_{i+1} = (\beta_{i+1}, \gamma_{i+1})$.

Тоді капітал X_i також можна представити у вигляді:

$$X_i = \beta_{i+1} B_i + \gamma_{i+1} S_i$$

За проміжок часу $[i, i+1]$ вартість банківського рахунку змінюється з B_i до B_{i+1}, а вартість акцій з S_i до S_{i+1}. Таким чином, капітал X_{i+1} буде представлений у вигляді

$$X_i = \beta_{i+1} B_{i+1} + \gamma_{i+1} S_{i+1}$$

Будемо вважати, що стан ринку та капітал в момент часу *i*, тобто

величини B_i, S_i та X_i нам відомі, і треба знайти оптимальні параметри портфелю $\pi_{i+1} = (\beta_{i+1}, \gamma_{i+1})$.

Тоді, оскільки $X_i = \beta_{i+1} B_i + \gamma_{i+1} S_i$, то $\beta_{i+1} = (X_i - \gamma_{i+1} S_i)/B_i$. Таким чином, капітал в момент часу *i+1* дорівнює:

$$X_{i+1} = \beta_{i+1} B_{i+1} + \gamma_{i+1} S_{i+1} = B_{i+1}(X_i - \gamma_{i+1} S_i)/B_i = (1+r)(X_i - \gamma_{i+1} S_i) + \gamma_{i+1}(1+\rho_{i+1}) S_i$$

Обчислимо математичне очікування капіталу інвестора X_{i+1}:

$$M[X_{i+1}] = M[(1+r)(X_i - \gamma_{i+1} S_i) + \gamma_{i+1}(1+\rho_{i+1}) S_i] = (1+r)(X_i - \gamma_{i+1} S_i) + \gamma_{i+1}(1+\overline{\rho_{i+1}}) S_i$$

та дисперсію капіталу інвестора X_{i+1}:

$$D[X_{i+1}] = D[(1+r)(X_i - \gamma_{i+1} S_i) + \gamma_{i+1}(1+\rho_{i+1}) S_i] = \gamma_{i+1}^2 S_i^2 D[\rho_{i+1}] = \gamma_{i+1}^2 S_i^2 \delta^2.$$

Введемо функцію прибутку інвестора у вигляді квадрата умовного математичного очікування капіталу в момент часу *i+1* та функцію ризику у вигляді умовної дисперсії капіталу у той же самий момент.

Оскільки капітал інвестора має бути найбільшим, а ризик найменшім, то введемо одно-кроковий критерій оптимальності фінансової діяльності інвестора в вигляді:

$$I[\gamma_{i+1}] = -\lambda(M[X_{i+1}])^2 + (1-\lambda) D[X_{i+1}]$$
$$\to \min(\gamma_{i+1})$$

де – деякий ваговий коефіцієнт, що задає компроміс між доходністю та ризиком.

Таким чином, функція $I(\gamma_{i+1})$ є многочленом другого степеня. Оскільки $X_i = \beta_{i+1} B_i + \gamma_{i+1} S_i$, то необхідно враховувати обмеження на параметри портфелю.

Для отримання параметрів оптимального портфелю інвестора застосуємо умови екстремуму цільової функції, що описує критерій оптимальності.

Обчислимо першу похідну від цільової функції *I*:

$$I' = -2\lambda((1+r)(X_i - \gamma_{i+1} S_i) + \gamma_{i+1}(1+\overline{\rho_{i+1}}) S_i)((1+\overline{\rho_{i+1}}) S_i - (1+r) S_i) + 2(1-\lambda)\gamma_{i+1} S_i^2 \sigma^2$$

В точці екстремуму цільової функції $I'(\gamma_{i+1}) = 0$, тоді оптимальні параметри портфелю

$$\gamma'_{i+1} = \frac{\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+r)}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2} \cdot \frac{X_i}{S_i}$$

Обчислимо другу похідну від цільової функції I:

$$I'=-2\lambda((1+\overline{\rho_{i+1}})S_i-(1+r)S_i)^2+2(1-\lambda)S_i^2\sigma^2=2S_i^2(-\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)^2+(1-\lambda)\sigma^2)$$

Проаналізуємо залежність типу екстремуму цільової функції від її параметрів.

Якщо $I'<0\Leftrightarrow\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)^2>(1-\lambda)\sigma^2$, то в точці γ'_{i+1} маємо максимум функції I, а якщо $I'>0\Leftrightarrow\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)^2<(1-\lambda)\sigma^2$, то маємо мінімум.

Якщо $\gamma'_{i+1}\le 0$ чи $\gamma'_{i+1}\ge\dfrac{X_i}{S_i}$, то на відрізку $\left[0;\dfrac{X_i}{S_i}\right]$ функція монотонна, а значить мінімум достягається в точці , або у точці $\dfrac{X_i}{S_i}$.

Якщо $\gamma'_{i+1}\in\left(0;\dfrac{X_i}{S_i}\right)$ та $I'<0$ то на відрізку $(0;\gamma'_{i+1}]$ цільова функція монотонно зростає, а на відрізку $\left[\gamma'_{i+1};\dfrac{X_i}{S_i}\right)$ монотонно спадає, таким чином мінімум достягається на границях відрізку обмежень, а саме в точках 0 або $\dfrac{X_i}{S_i}$.

Отримані результати дозволяють побудувати оптимальну стратегію формування портфелю інвестора у залежності від параметрів моделі ринку.

Розглянемо перший випадок, коли $\gamma_{i+1}=0$, тоді $I(0)=-\lambda((1+r)X_i)^2$ або $\gamma_{i+1}=\dfrac{X_i}{S_i}$ тоді $I\left(\dfrac{X_i}{S_i}\right)=-\lambda(1+\overline{\rho_{i+1}})X_i)^2+(1-\lambda)X_i^2\sigma^2$.

Таким чином, у цьому випадку оптимальна стратегія формування портфелю має наступний вигляд:

- якщо $I(0)<I\left(\dfrac{X_i}{S_i}\right)\Leftrightarrow\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)(2+\overline{\rho_{i+1}}+r)<(1-\lambda)\sigma^2$, то увесь капітал треба вкласти в банк.
- якщо $I(0)>I\left(\dfrac{X_i}{S_i}\right)\Leftrightarrow\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)(2+\overline{\rho_{i+1}}+r)>(1-\lambda)\sigma^2$, то увесь капітал доцільно вкладати в акції.

Розглянемо другий випадок, коли $\gamma'_{i+1}\in\left(0;\dfrac{X_i}{S_i}\right)$ та $I'>0$, тоді в точці γ'_{i+1} маємо мінімум цільової функції, тобто:

$$\gamma_{i+1}=\gamma'_{i+1}=\frac{\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)(1+r)}{(1-\lambda)\sigma^2-\lambda(\overline{\rho_{i+1}}-r)^2}\cdot\frac{X_i}{S_i}$$

Таким чином, в цьому випадку оптимальна стратегія формування портфелю інвестора вже є динамічною та на кожному кроці має наступний вигляд:

- треба вкладати в акції

$$\gamma_{i+1}S_i = \frac{\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+r)X_i}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2}$$

- треба вкладати в банк

$$\beta_{i+1}B_i = X_i - \gamma_{i+1}S_i \frac{((1-\lambda)\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+\overline{\rho_{i+1}}))X_i}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2}$$

Зазначимо, що останній випадок має місце, коли параметри моделі (*B,S*) - ринку задовольняють наступним співвідношенням:

$$\begin{cases} I' > 0 \\ \gamma'_{i+1} \in \left(0; \dfrac{X_i}{S_i}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2 < (1-\lambda)\sigma^2 \\ \dfrac{\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+r)}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2} \end{cases}$$

Результати комп'ютерного моделювання. Проведемо комп'ютерне моделювання запропонованої оптимальної стратегії інвестора. Як приклад розглянемо випадок, коли інвестор на початковому кроку має капітал $X_0 = 10000$ ум. од., які він розподіляє наступним чином: інвестор має $\beta_0 = 5$ банківських рахунків по $B_0 = 1000$ ум. од. кожен, та $\gamma_0 = 50$ акцій початковою вартістю $S_0 = 100$ ум. од.

Нехай банківський відсоток $r = 0{,}1$, а вартість акції змінюється залежно від зміни випадкової величини ρ_i, яка приймає значення $\rho_i = 0{,}35$ з ймовірністю 0,7 та значення $\rho_i = -0{,}35$ з ймовірністю 0,3. Приймемо ваговий параметр .

Тоді $\sigma^2 = 0{,}103$, $\overline{\rho_{i+1}} = 0{,}14$, при цьому:

$$\frac{\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+r)}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2} = 0{,}434$$

$$I' = 2S_i^2(-\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2 + (1-\lambda)\sigma^2) = 2S_i^2 \cdot 0{,}051 > 0$$

Таким чином, має місце ситуація, коли оптимальний портфель інвестора змінюється в часі відповідно до наступної динамічної стратегії:

$$\gamma_{i+1} = \frac{\lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+r)}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2} \cdot \frac{X_i}{S_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{((1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)(1+\overline{\rho_{i+1}})X_i}{(1-\lambda)\sigma^2 - \lambda(\overline{\rho_{i+1}} - r)^2 B_i}$$

На рис. 1 наведено графіки зміни випадкової величини ρ_i і змінення вартості акцій S_i :

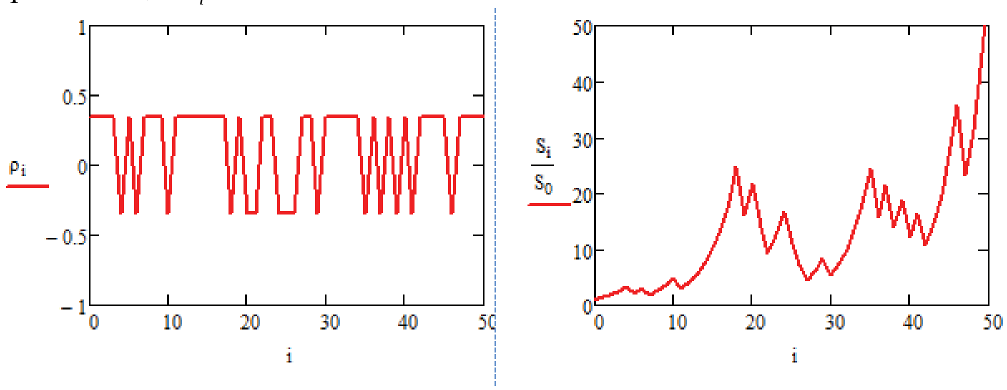

Рис. 1. Зміна вартості акцій

На рис. 2 наведено графіки зміни середньої вартості акцій MS_i і вартості банківських рахунків B_i, які не залежать від інвестора:

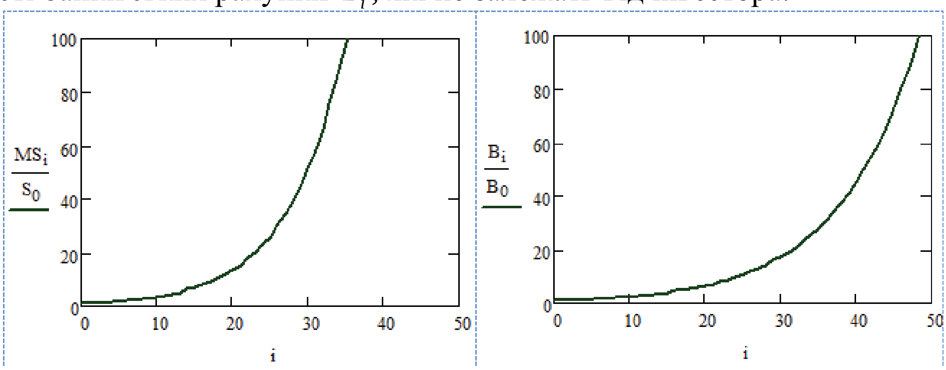

Рис. 2. Зміна середньої вартості акцій та банківських рахунків

На рис. 3 наведено графіки зміни кількості банківських рахунків β_i і кількості акцій γ_i, які задає інвестор відповідно до своєї оптимальної стратегії для $\lambda = 0,5$.

На рис. 4 наведено графіки зміни капіталу інвестора X_i та різниці між капіталом та функцією f_i для $\lambda = 0,5$.

Проведемо аналогічне статистичне комп'ютерне моделювання оптимальної стратегії для інших значень параметру цільової функції $\lambda = 0,4$ (рис. 5, 6) та $\lambda = 0,6$ (рис. 7, 8).

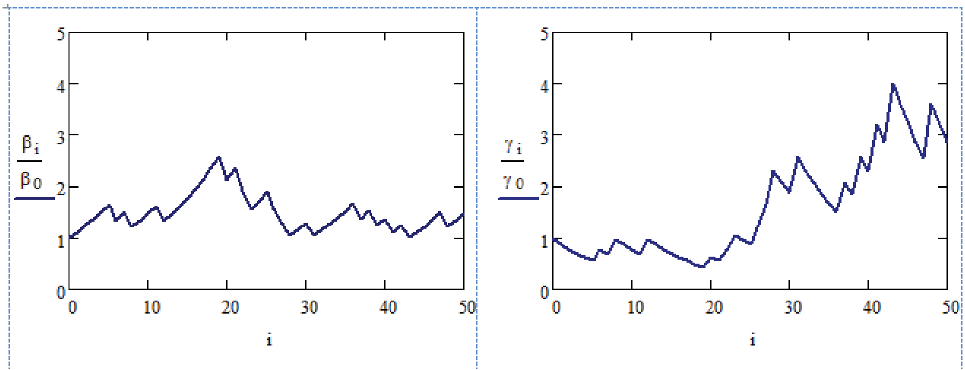

Рис. 3. Структура оптимального динамічного портфелю інвестора для $\lambda = 0,5$

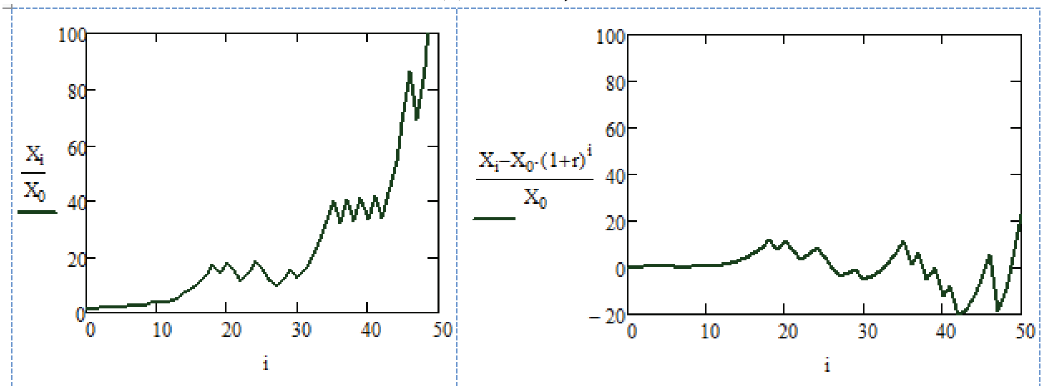

Рис. 4. Динаміка зміни капіталу інвестора для $\lambda = 0,5$

На рис. 5 наведено графіки зміни кількості банківських рахунків β_i і кількості акцій γ_i, які задає інвестор відповідно до оптимальної стратегії для $\lambda = 0,4$:

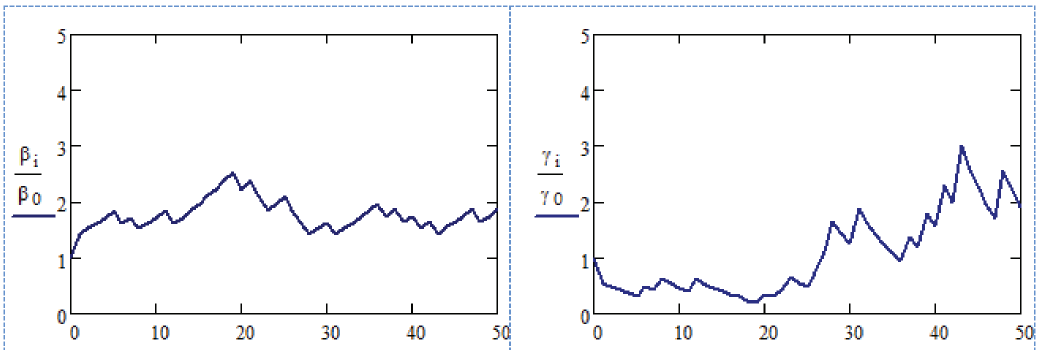

Рис. 5. Структура оптимального динамічного портфелю інвестора для $\lambda = 0,4$

На рис. 6 наведено графіки зміни капіталу інвестора X_i та різниці між капіталом та платіжною функцією f_i для $\lambda = 0,4$.

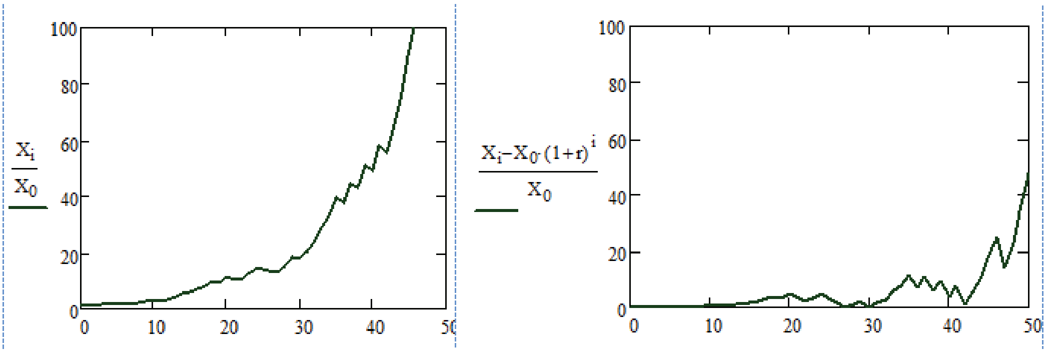

Рис. 6. Динаміка зміни капіталу інвестора для $\lambda = 0,4$

На рис. 7 наведено графіки зміни кількості банківських рахунків β_i і кількості акцій γ_i, які задає інвестор відповідно до оптимальної стратегії для $\lambda = 0,6$.

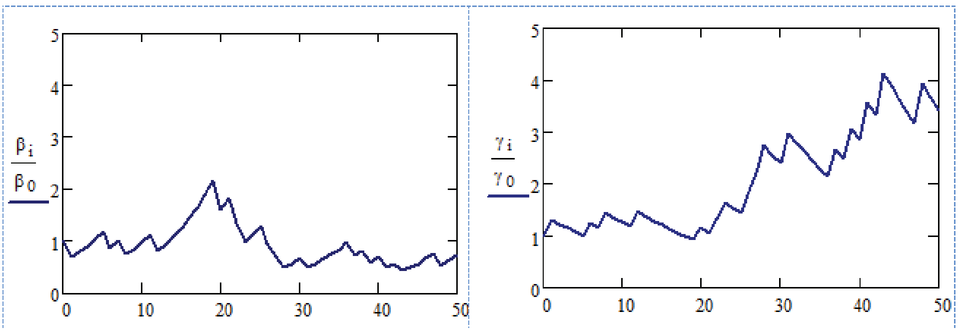

Рис. 7. Структура оптимального динамічного портфелю інвестора для $\lambda = 0,6$

На рис. 8 наведено графіки зміни капіталу інвестора X_i та різниці між капіталом та платіжною функцією f_i для

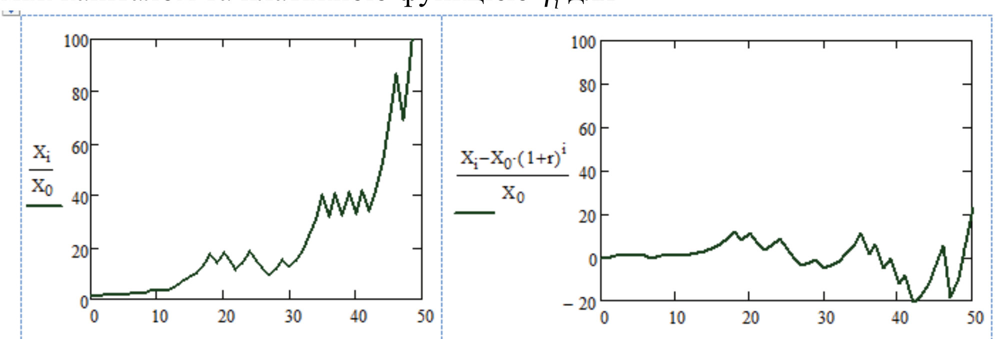

Рис. 8. Динаміка зміни капіталу інвестора для $\lambda = 0,6$

Таким чином, результати моделювання свідчать про те що, збільшення вагового коефіцієнту λ призводить до того, що інвестор зменшує кількість банківських рахунків і підвищує кількість акцій у своєму портфелі. Внаслідок цього капітал інвестора у середньому скоріш зростає, але при цьому збільшується ризик, що проявляється в значних випадкових коливаннях графіку поточного рівня капіталу.

Висновки. Розглянута та розв'язана задача побудови моделі оптимальної динамічної стратегії побудови портфеля інвестора математичну з застосуванням моделі фінансового ринку на прикладі *(B, S)*-ринку із дискретним часом. В якості показника оптимальності поведінки інвестора використовується критерій, що враховує середній прибуток та ризик інвестора. Визначено оптимальні параметри розподілу капіталу, що характеризують портфель інвестора з використанням ризикових та безризикових активів. Результати моделювання свідчать про те, що капітал інвестора у середньому зростає швидше, ніж платіжна функція f_n. Збільшення коефіцієнту λ призводить до того, що інвестор зменшує кількість банківських рахунків і підвищує кількість акцій у своєму портфелі.

Література

1.Бондарев Б. В. Инвестиции. Математическая теория. Донецк.: АПЕКС, 2002. – 227 с.

2.Гончар М. С. Фондовий ринок і економічний ріст. К.: Обереги, 2001. – 826 с.

3.Малыхин В.И. Финансовая математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 247 с.

4.Барабанов А.Е. Краткие сведения по стохастической финансовой математике: Учебное пособие. – СПб.: С-Петерб. гос. ун-т, 2003. – 35 с.

5.Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ. – 2001. – 234 с.

6.Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. – 2005. № 5. С. 84 – 97.

7.Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. – М.: ФАЗИС, 1998. – 512 с.

8.Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. – М.: ФАЗИС, 1998. – 544 с.

Надійшла до редакції 18.04.2014