

УДК 621.91.01

**В.О. Логомінов,**к.т.н.,
Запорізький
національний
технічний
університет
e-mail:
logomin@zntu.edu.ua**МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ
ОРТОГОНАЛЬНОМ ТОЧЕНИИ (ОБЗОР)**

В.О. Логомінов. Методи побудови діаграм стійкості при ортогональному різанні (огляд). У статті розглянуті різні методи побудови діаграм стійкості при різанні. На прикладі простого випадку ортогонального точіння наведені методика їх побудови. Розглянуто їх переваги та недоліки.

V.O. Logominov. Methods of calculating the stability lobes diagram in the orthogonal turning (Review). The paper describes the various methods of charting the stability lobes diagram during cutting. For example, the diagrams calculating technique for the simple case orthogonal turning are shown. Their advantages and disadvantages are considered.

Введение. Прогнозирование устойчивости при резании важная задача, решение которой необходимо для выбора оптимальных режимов обработки, которые с одной стороны обеспечат высокую производительность, а с другой не приведут к появлению недопустимых вибраций. Результатом анализа виброустойчивости обработки часто является построение лепестковой диаграммы устойчивости [1] (см. рис. 1). Существует несколько основных методов построения диаграмм устойчивости, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками:

1. Аналитический метод. Наиболее быстрый метод. Однако он не подходит для анализа прерывистого резания, например, фрезерования с малым углом контакта.

2. Численные методы, среди которых нужно выделить:

2.1 Метод полудискретизации. Позволяет анализировать виброустойчивость прерывистого резания. Но требует большого времени для расчета.

2.2 Метод полной дискретизации. Он схож с методом полудискретизации. Требуется меньше времени для расчета, чем метод полудискретизации, однако его точность несколько ниже, чем у метода полудискретизации.

2.3 Методы имитационного моделирования во временной области. Позволяют учесть реальную кинематику процесса, механику резания, геометрию инструмента, радиальное биение, внутреннюю и внешнюю волни-

стость на поверхності резання і другіє нелінійності. Однакo затрати часу вельоо великi для побудови повної діаграми устійності.

3. Експериментальні методи. Самі затратні по часу і стоимості методи. Крім того, аналіз устійності можна провести тільки для конкретної заготовки, інструмента і станка.

Несмотря на то, что методы полудискретизации и полной дискретизации чаще используются для анализа процессов фрезерования, для простоты рассмотрения их основных особенностей, в этой статье они применяются для построения диаграмм устійности при ортогональном резании (точении).

Матеріал і результати дослідження. Розглянемо простий випадок ортогонального резання. Схема процесу показана на рис. 1. Уравнение движения колебательной системы выражается в следующем виде:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = F(t) = \frac{\omega_n^2}{k_x} K_f a [h_0 - x(t) + x(t-T)], \quad (1)$$

где $\zeta = c_x / (2m_x \omega_n)$ – коэффициент демпфирования; m_x – приведенная масса колебательной системы; $\omega_n = \sqrt{k_x/m}$ – угловая частота собственных колебаний; $F(t)$ – сила резания; k_x – жесткость системы; K_f – коэффициент резания; a – ширина срезаемого слоя; h_0 – номинальная толщина срезаемого слоя; $T = \frac{1}{n}$ – период одного оборота детали, или период запаздывания; n – частота вращения шпинделя.

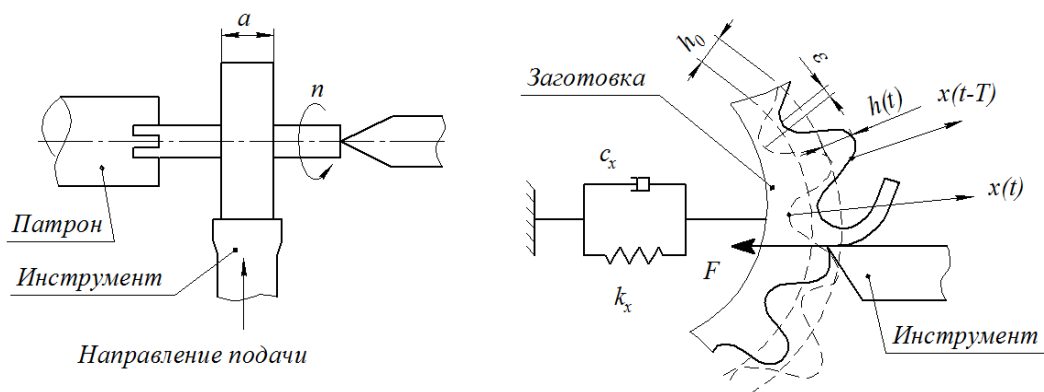


Рис. 1. Динаміка ортогональної системи резання [2]

Построим вначале лепестковую диаграмму устойчивости методом безразмерного анализа, предложенного Т. Insperger и G. Stérán в работе [3]. Это позволит увидеть основные свойства лепестковой диаграммы устойчивости. На устойчивость процесса резания влияет только динамическая толщина срезаемого слоя. Поэтому примем, что $h_0 = 0$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = F(t) = \frac{\omega_n^2}{k_x} K_f a [-x(t) + x(t-T)]. \quad (2)$$

Для приведения уравнения (2) к безразмерному виду, произведем замену $t = \tau/\omega_n$:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \omega_n t, \quad \delta = \omega_n T, \quad d\tau = \omega_n dt \rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \omega_n, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \omega_n, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{d\tau} \omega_n \right) = \frac{d^2 y}{d\tau^2} \omega_n^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя угловое расстояние $\delta = \omega_n T$ и $\tau = \omega_n t$ в уравнение динамики резания (2), получим:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 \frac{d^2 x(t)}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n^2 \frac{dx(t)}{d\tau} + \omega_n^2 x(t) &= \frac{\omega_n^2}{k_x} K_f a [-x(\tau) + x(\tau - \delta)], \\ \frac{d^2 x(t)}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dx(t)}{d\tau} + [1 + w]x(t) &= w [-x(\tau) + x(\tau - \delta)], \end{aligned} \quad (4)$$

где w – безразмерная ширина среза $w = K_f a / k_y$. Применяя преобразование Лапласа, получим:

$$p^2 x(p) + 2\zeta p x(p) + [1 + w]x(p) = w e^{-\delta p} x(p), \quad (5)$$

которое приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$p^2 + 2\zeta p + [1 + w] - w e^{-\delta p} = 0, \quad (6)$$

где p – комплексная частота.

Для нахождения границы устойчивости (методом D-разбиения [4]), корни характеристического уравнения (6) должны действительную часть равную нулю, а мнимая часть должна указывать соответствующую частоту колебаний (ω_c) во время обработки. Подставляем $p = ir$, где $r = \omega_c / \omega_n$ – соотношения круговых частот регенеративных колебаний и собственной круговой частоты системы и учитывая $e^{-i\delta r} = \cos \delta r - i \sin \delta r$ получаем характеристическое уравнение:

$$-r^2 + i2\zeta r + [1 + w] - w \cos \delta r + i w \sin \delta r = 0, \quad (7)$$

Приравнивая нулю отдельно действительную и мнимую части, получаем:

$$\begin{aligned} \text{Действительная часть} &- 1 - r^2 + w = w \cos \delta r \\ \text{Мнимая часть} &- 2\zeta r = -w \sin \delta r \end{aligned} \quad (8)$$

Возведя в квадрат действительную и мнимую часть, и просуммировав их $((1 - r^2 + w)^2 + (2\zeta r)^2 = w^2)$, получим выражение для безразмерной ширины среза:

$$w = -\frac{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}{2(1 - r^2)}. \quad (9)$$

Толщина среза на границе устойчивости, выраженная в единицах длины, тогда будет:

$$a = -\frac{k_x}{K_f} \frac{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}{2(1 - r^2)} a = -\frac{k_x}{K_f} \frac{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}{2(1 - r^2)}. \quad (10)$$

Подставляя $\sin \delta r = 2tg \frac{\delta r}{2} / [1 + tg^2 (\frac{\delta r}{2})]$ в мнимую часть $(2\zeta r = -w \sin \delta r)$ характеристического уравнения (7), получаем:

$$1 - r^2 - \frac{1 + tg^2 (\frac{\delta r}{2})}{tg (\frac{\delta r}{2})} \zeta r = -\frac{1 + tg^2 (\frac{\delta r}{2})}{tg (\frac{\delta r}{2})} \zeta r \frac{1 - tg^2 (\frac{\delta r}{2})}{1 + tg^2 (\frac{\delta r}{2})}. \quad (11)$$

После преобразований, получим:

$$\delta = \frac{2}{r} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1-r^2}{2\zeta r} \right) + k\pi \right], \quad (12)$$

где $k = 1, 2, \dots$ – целое число волн, образующихся на поверхности резания при регенеративных колебаниях.

Соответствующая скорость вращения шпинделя на границе устойчивости можно найти, перейдя от безразмерного запаздывания к запаздыванию, выраженному в секундах:

$$\begin{aligned} \text{Запаздывание} - T &= \frac{\delta}{\omega_n} = \frac{2}{\omega_n r} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1-r^2}{2\zeta r} \right) + k\pi \right], \text{ [с];} \\ \text{Число оборотов шпинделя} - n &= \frac{\omega_n r}{2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1-r^2}{2\zeta r} \right) + k\pi \right]}, \text{ [об/с].} \end{aligned} \quad (13)$$

Диаграмма устойчивости, построенная по параметрическим уравнениям (13) для коэффициента демпфирования $\zeta = 0,05$, показана на рис. 2. Ширина срезаемого слоя не может быть отрицательной. Поэтому отбросив часть диаграммы, соответствующую отрицательным значениям толщины среза, и объединив области вибраций, получим диаграмму, показанную на рис. 3. На рисунке также показаны частоты регенеративных колебаний ($\omega_c = 2\pi f_c$), соответствующие частоте вращения шпинделя.

Проанализируем построенную диаграмму устойчивости. При соотношении частоты регенеративных колебаний к собственной частоте колебательной системы равной $r = \omega_c / \omega_n = \sqrt{1+2\zeta}$ критическая глубина резания приобретает свое минимальное значение, соответствующее простой формуле Тлустого [5], [1]:

$$a_{crit} = \frac{2k_x \zeta (1+\zeta)}{K_t} \approx \frac{2k_x \zeta}{K_t}, \quad \text{если } \zeta^2 \approx 0 \quad (14)$$

Подставив $r = \omega_c / \omega_n = \sqrt{1+2\zeta}$ в уравнение (13), найдем скорости вращения шпинделя, соответствующие значению a_{crit} :

$$n \approx \frac{\omega_n}{2\pi} \left(\frac{4}{4k-1} \right) = f_n \left\{ \frac{4}{3}, \frac{4}{7}, \frac{4}{11}, \dots \right\}, [\text{об/с}] \quad (15)$$

Каждый выступ на лепестковой диаграмме устойчивости имеет вертикальную асимптоту, соответствующую частоте вращения шпинделя $n = \frac{\omega_n}{2\pi k} = \frac{f_n}{k} = f_n \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$. При данной частоте вращения шпинделя на поверхности резания укладывается целое число волн регенеративных колебаний и наблюдается максимальное значение критической ширины среза.

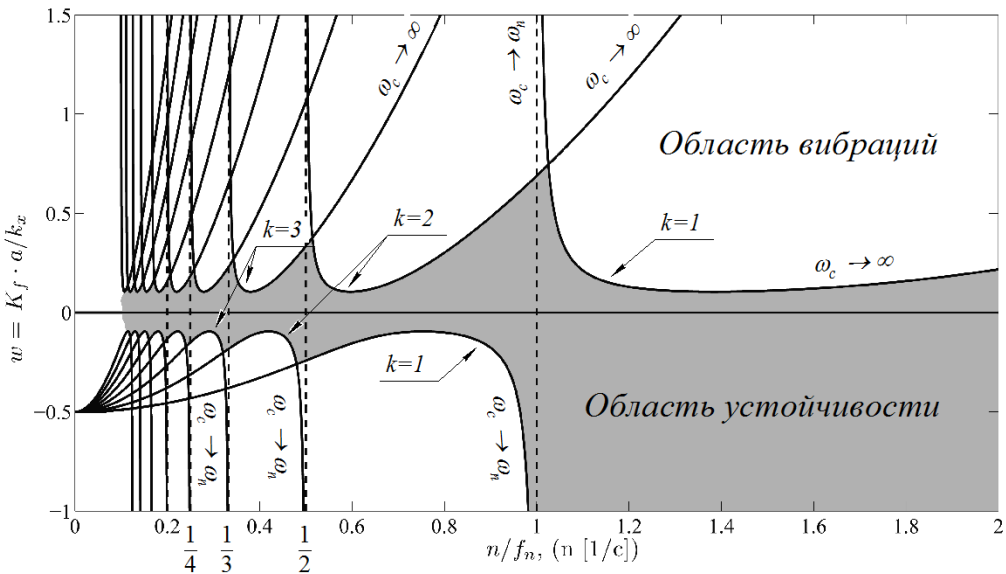


Рис. 2. Диаграмма устойчивости в безразмерных координатах [3]

Рассмотрим следующий метод построения диаграмм устойчивости, предложенный Tobias [6], Тлустым [5] и Merrit [7]. Это аналитический метод в котором используются методы линейной теории устойчивости.

Уравнение динамики ортогональной системы резания (2) можно представить в виде блок-схемы (рис. 4), в которой параметры процесса резания показаны в частотной области. Переход из временной области в частотную область осуществляется с помощью преобразования Лапласа ($x(p) \rightarrow L(x(t))$, где L – символ преобразования Лапласа, p – комплексная частота). Входом в систему задается толщина среза h_0 , а выходом системы с обратной связью – регенеративные колебания, оставляющие волнистость на внутренней поверхности стружки. Волнистость на внешней по-

верхности стружки образовалась на предыдущем обороте шпинделя, что соответствует $e^{-pT}x(p) = L(x(t-T))$.

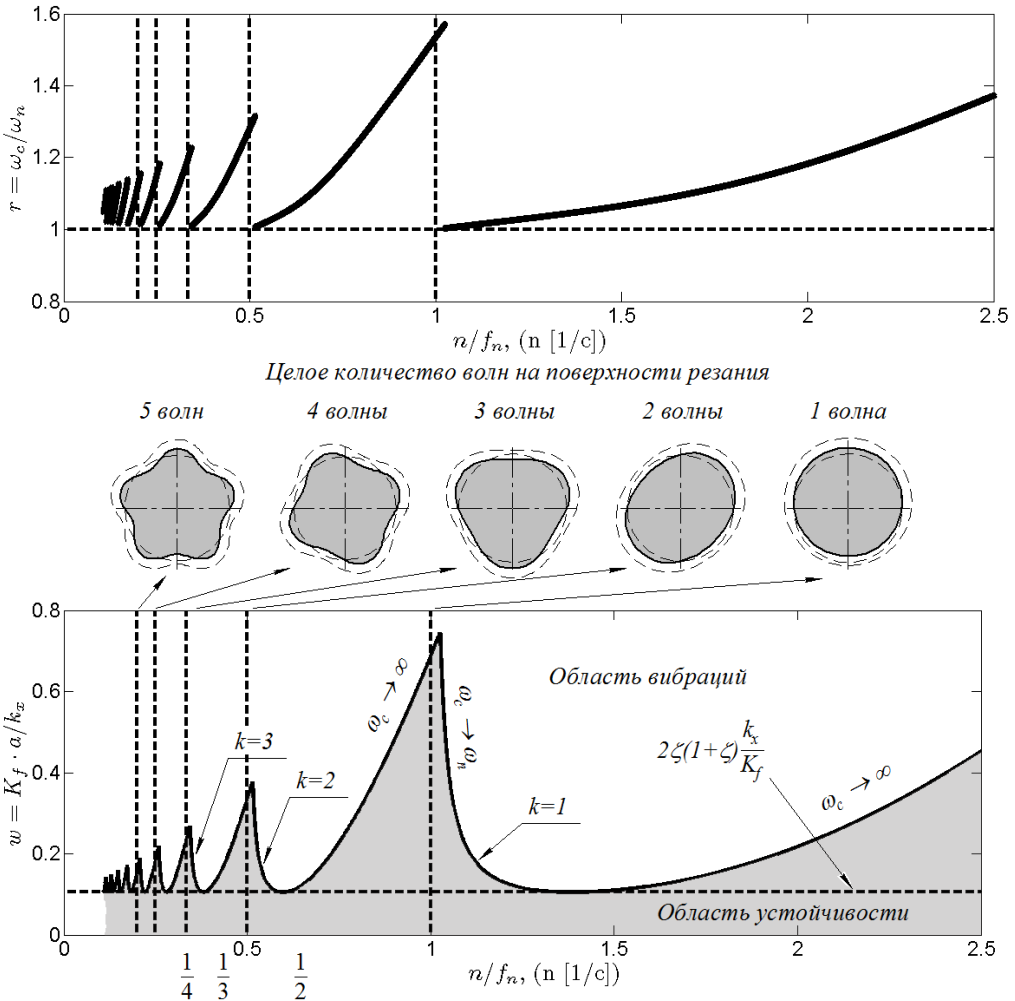


Рис. 3. Диаграмма устойчивости в безразмерных координатах и соответствующие частоты регенеративных колебаний ω_c [3]

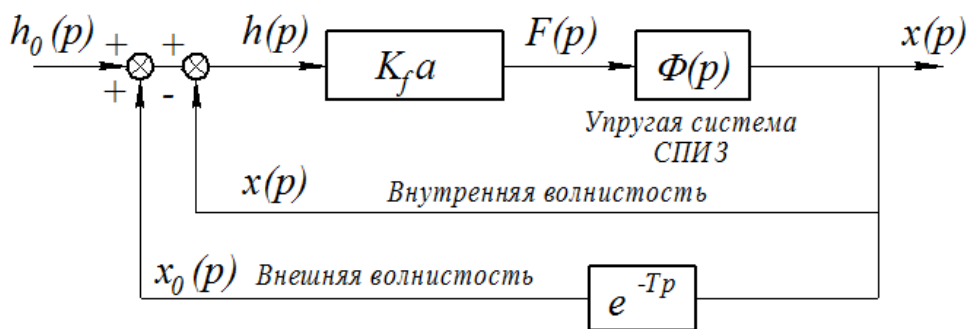


Рис. 4. Блок схема динамики ортогональной системы резания [2]

Передаточная функция замкнутой системы, изображенной на рис. 4:

$$\frac{h(p)}{h_0(p)} = \frac{1}{1 + (1 - e^{-pT}) K_f a \Phi(p)}, \quad (16)$$

где $\Phi(p)$ – передаточная функция упругой системы СПИЗ с одной степенью свободы:

$$\Phi(p) = \frac{x(p)}{F} = \frac{\omega_n^2}{k_y (p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)}. \quad (17)$$

Устойчивость передаточной функции замкнутой системы (16) определяется корнями характеристического уравнения:

$$1 + (1 - e^{pT}) K_f a \Phi(p) = 0 \quad (18)$$

Представим корень характеристического уравнения в виде $-p = \sigma + i\omega_c$, где i – мнимая единица, $\omega_c = 2\pi f_c$ – круговая частота регенеративных колебаний. Если действительная часть корня больше нуля ($\sigma > 0$), решение уравнения (2) во временной области будет иметь экспоненциальное слагаемое с положительной степенью $e^{+\sigma|t}$. В этом случае колебания будут неограниченно возрастать с течением времени и система, соответственно, будет неустойчивой. Напротив если действительная часть корня будет меньше нуля ($\sigma < 0$), то колебания системы будут со временем затухать (т.к. $e^{-|\sigma|t}$). Когда действительная часть корня равна нулю ($p = i\omega_c$), система находится на границе устойчивости и колеба-

ния происходят с постоянной амплитудой с круговой частотой $\omega_c = 2\pi f_c$. Частота регенеративных колебаний (f_c) не равна частоте собственных колебаний системы (f_n), однако близка к ней. На границе устойчивости ($p = i\omega_c$), характеристическое уравнение (17) приобретает вид:

$$1 + (1 - e^{-j\omega_c T}) K_f a_{\text{lim}} \Phi(j\omega_c) = 0, \quad (19)$$

где a_{lim} – максимальная ширина среза для виброустойчивого резания. Передаточная функция упругой системы может быть представлена как сумма её действительной и мнимой части (т.е. $\Phi(j\omega_c) = G + jH$). Сгруппируем слагаемые характеристического уравнения (18) в действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} & \left(1 + K_f a_{\text{lim}} (G(1 - \cos(\omega_c T)) - H \sin \omega_c T)\right) + \\ & + j \left(K_f a_{\text{lim}} (G \sin \omega_c T + H(1 - \cos \omega_c T))\right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Действительная и мнимая часть уравнения (20) должны равняться нулю. Рассмотрим вначале мнимую часть:

$$K_f a_{\text{lim}} (G \sin \omega_c T + H(1 - \cos \omega_c T)) = 0, \quad (21)$$

или в другом виде:

$$\text{tg}\psi = \frac{H(\omega_c)}{G(\omega_c)} = \frac{\sin \omega_c T}{\cos \omega_c T - 1}, \quad (22)$$

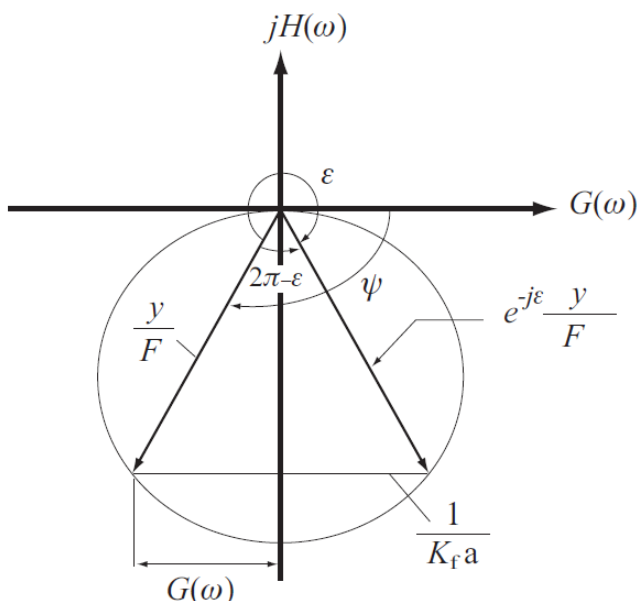
где ψ – фазовый сдвиг передаточной функции упругой системы. Используя тригонометрическое соотношение $\cos \omega_c T = \cos^2(\omega_c T/2) - \sin^2(\omega_c T/2)$ и $\sin \omega_c T = 2 \sin(\omega_c T/2) \cos(\omega_c T/2)$, получим:

$$\text{tg}\psi = \frac{\cos(\omega_c T/2)}{-\sin(\omega_c T/2)} = \text{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2} - \frac{3\pi}{2}\right), \quad (23)$$

и тогда

$$\omega_c T = 3\pi + 2\psi \rightarrow \psi = \operatorname{arctg} \frac{H}{G}. \quad (24)$$

Необходимо отметить, что угол сдвига фаз ψ должен быть корректно вычислен при использовании математических программ, как показано на рис. 5. Так при использовании GNU Octave (аналог MATLAB) вместо функции $\operatorname{atan}(H/G)$ следует использовать функцию $\operatorname{atan2}(H,G)$.



$$G > 0, H < 0 \rightarrow \psi = -\operatorname{arctg} \left| \frac{H}{G} \right|.$$

$$G < 0, H < 0 \rightarrow \psi = -\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{H}{G} \right|.$$

$$G < 0, H > 0 \rightarrow \psi = -\pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{H}{G} \right|.$$

$$G > 0, H > 0 \rightarrow \psi = -2\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{H}{G} \right|.$$

Рис. 5. Вычисление угла сдвига фаз ψ по графику $\Phi(j\omega_c) = G + jH$ на комплексной плоскости [2]

Число вибрационных волн, оставленных на поверхности резания, зависит от двух параметров: частоты вращения шпинделя n [об/с] и частоты регенеративных колебаний ω_c [рад/с] или f_c [Гц]:

$$f_c \cdot T = \frac{f_c}{n} = k + \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad (25)$$

где k – целое число волн; $\varepsilon/2\pi$ – дробное число волн.

Тогда период и соответствующая частота вращения шпинделя:

$$T = \frac{2k\pi + \varepsilon}{2\pi f_c} \rightarrow n = \frac{1}{T} \left[\frac{\text{об}}{\text{с}} \right], \quad (26)$$

где $\varepsilon = 3\pi + 2\psi$ – угол сдвига фаз между внутренней и внешней волнистостью, соответственно на поверхности резания и свободной поверхности снимаемой стружки.

Критическую толщину среза можно найти, приравняв нулю действительную часть характеристического уравнения (20):

$$\left(1 + K_f a_{\text{lim}} \left(G(1 - \cos(\omega_c T) - H \sin \omega_c T) \right) \right) = 0 \quad (27)$$

Тогда:

$$a_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_f G(\omega_c)}. \quad (28)$$

Поскольку толщина срезаемого слоя величина положительная, то уравнение (28) действительно только для отрицательных значений действительной части передаточной функции упругой системы $G(\omega_c)$. Выражение (28) означает, что критическая толщина срезаемого слоя обратно пропорциональна податливости упругой системы и коэффициенту радиальной силы резания. Алгоритм построения лепестковой диаграммы устойчивости включает следующие этапы:

- Выбор частоты колебаний (ω_c) на отрицательной части аклюю ительной части передаточной функции упругой системы $G(\omega_c)$.
- Вычисление угла сдвига фаз ψ передаточной функции упругой системы при ω_c по формуле (24).
- Вычисление критической ширины среза a_{lim} по формуле (28).
- Определение частоты вращения шпинделя n по формуле (26) для каждого лепестка диаграммы устойчивости $k = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 6 показана побудована по даному алгоритму діаграма устойчивости и график действительной части передаточной функции упругой системы $G(\omega_c)$. Видно, что в случае простой упругой системы с одной степенью свободы она не отличается от диаграммы, построенной с помощью безразмерного анализа (рис. 3).

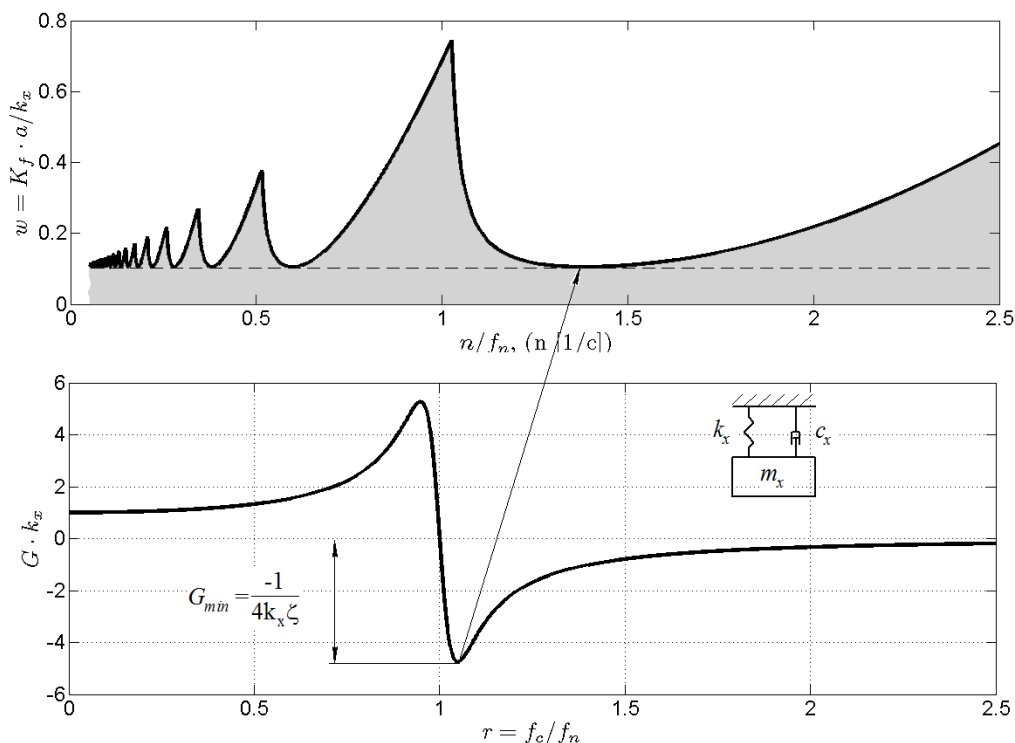


Рис. 6. Діаграма устойчивости и график действительной части передаточной функции упругой системы ($\zeta = 0,05$)

Следующий рассматриваемый метод построения диаграмм устойчивости называется методом полудискретизации. Он был предложен Т. Insperger и G. Stépán [3]. Основная идея метода полудискретизации заключается в аппроксимации бесконечномерного пространства состояний дифференциального уравнения с запаздыванием (2) (ДУЗ) конечномерным пространством состояний многомерных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Воспользуемся выводом уравнений метода полудискретизации, приведенным в работе [2]. Преобразуем ДУ второго порядка (1) в систему ДУ первого порядка заменой переменных:

$$, x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} ,$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} = -\omega_n^2 \left(1 + \frac{K_f a}{k_x} \right) x_1(t) - 2\zeta \omega_n x_2(t) + \frac{\omega_n^2}{k_x} K_f a x_1(t-T) \quad (29)$$

После замены переменных уравнение (2) становится системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix}}_{\dot{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 \left(1 + \frac{K_f a}{k_x} \right) & -2\zeta \omega_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}}_{y(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega_n^2}{k_x} K_f a & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1(t-T) \\ 0 \end{Bmatrix}}_{y(t-T)}, \quad (30)$$

или в матричной форме:

$$\dot{y}(t) = \mathbf{L}y(t) + \mathbf{R}y(t-T). \quad (31)$$

Время запаздывания T делится на m дискретных интервалов времени Δt , таким образом $T = m \cdot \Delta t$. Обозначим значение $y(t)$ в текущий момент времени t_i как y_i , а в момент времени $t_i - T$ как $y(t_i - T) = y[(i-m)\Delta t] = y_{i-m}$. Если шаг дискретизации Δt достаточно мал, значение $y(t-T)$ можно приближенно определить, зная значения y на двух последовательных интервалах дискретизации $y(t_i - T)$ и $y(t_i - T + \Delta t)$:

$$y(t-T) \approx \frac{y(t_i - T) + y(t_i - T + \Delta t)}{2} = \frac{y_{i-m+1} + y_{i-m}}{2} \rightarrow t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (32)$$

Формула (32) соответствует улучшенной полудискретизации нулевого порядка (рис. 5). Кроме того, в работе [3] рассмотрена также полудискретизация нулевого, первого и более высоких порядков. Подставляя уравнение (32) в (31) получим:

$$\dot{y}(t) = \mathbf{L}y(t) + \mathbf{R} \left(\frac{y_{i-m+1} + y_{i-m}}{2} \right), t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (33)$$

Общее решение ДУ (32) на малом интервале времени ($t \in [t_i, t_{i+1})$) выражается суммой общего решения ОДУ ($y_{ih}(t)$) и частного решения неоднородного ДУ ($y_{ip}(t)$):

$$y(t) = y_{ih}(t) + y_{ip}(t). \quad (34)$$

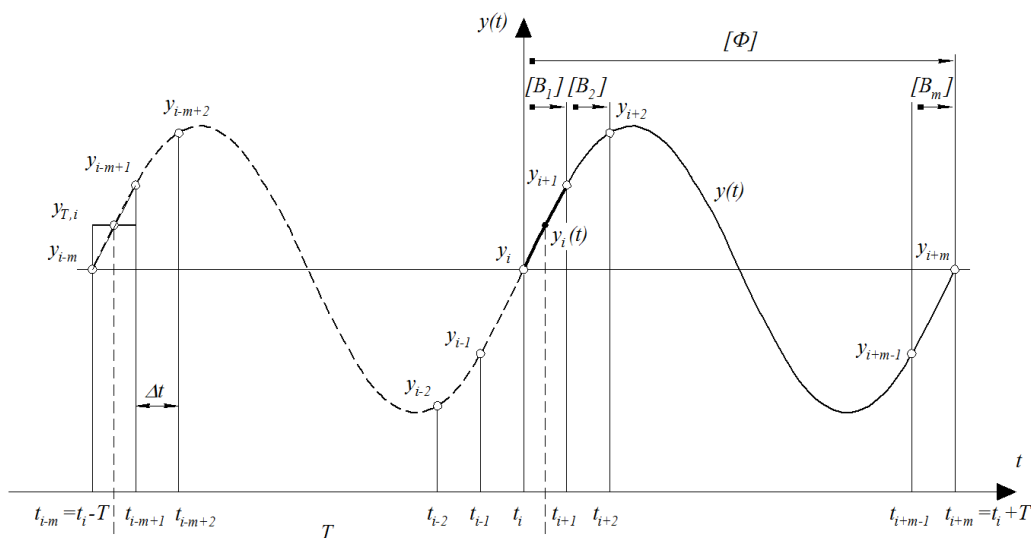


Рис. 5. Полудискретизация периодической функции [2]

Общее решение ОДУ запишется в виде [8]:

$$\dot{y}_{ih}(t) = \mathbf{L}y_{ih}(t) \rightarrow y_{ih}(t) = C_0 e^{\mathbf{L}(t-t_i)}, \quad (35)$$

где C_0 зависит от начальных условий. Частное решение определяется как:

$$\dot{y}_{ip}(t) = \mathbf{L}y_{ip}(t) + \mathbf{R} \left(\frac{y_{i-m+1} + y_{i-m}}{2} \right),$$

$$y_{ip}(t) = \mathbf{u}(t) e^{\mathbf{L}(t-t_i)} \rightarrow \frac{d}{dt} y_{ip}(t) = e^{\mathbf{L}(t-t_i)} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + \mathbf{L} e^{\mathbf{L}(t-t_i)} \mathbf{u}(t). \quad (36)$$

Подставляя $y_{ip}(t) = \mathbf{u}(t) e^{\mathbf{L}(t-t_i)}$ и взяв производную $\dot{y}_{ip}(t) = \frac{dy_{ip}(t)}{dt}$ по-

лучаем:

$$e^{L(t-t_i)} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{L}e^{L(t-t_i)} \mathbf{u}(t) = \mathbf{L}\mathbf{y}_{ip}(t) + \mathbf{R} \left(\frac{\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}}{2} \right) \quad (37)$$

которое приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) &= \frac{1}{2} e^{-L(t-t_i)} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}), \\ \mathbf{u}(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} e^{-L(t-t_i)} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя $\mathbf{u}(t)$ в $\mathbf{y}_{ip}(t) = e^{L(t-t_i)} \mathbf{u}(t)$, получаем:

$$\mathbf{y}_{ip}(t) = e^{L(t-t_i)} \mathbf{u}(t) = -\frac{1}{2} e^{L(t-t_i)} \mathbf{L}^{-1} e^{-L(t-t_i)} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \quad (39)$$

Используя свойство экспоненты матрицы $\mathbf{Y}e^{\mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}} = e^{\mathbf{Y}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}}$ [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{y}_{ip}(t) &= -\frac{1}{2} \left[\mathbf{L}e^{L(t-t_i)} \mathbf{L}^{-1} \right] e^{-L(t-t_i)} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}) \\ \mathbf{y}_{ip}(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \left[e^{\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1}L(t-t_i)} \right] e^{-L(t-t_i)} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}) = \\ \mathbf{y}_{ip}(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} e^{L(t-t_i)} e^{-L(t-t_i)} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}) = \\ \mathbf{y}_{ip}(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда общее решение ДУ (33) $\mathbf{y}_i(t)$:

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}_{ih}(t) + \mathbf{y}_{ip}(t) = C_0 e^{L(t-t_i)} - \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \quad (41)$$

В момент времени $t = t_i$ уравнение (41) становится:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{ih}(t_i) + \mathbf{y}_{ip}(t_i) = C_0 - \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m})$$

$$C_0 = \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \quad (42)$$

Так как решение действительно на шаге дискретизации Δt , то разницу во времени между соседними интервалами дискретизации можно заменить на $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. В этом случае уравнение (41) примет вид:

$$\mathbf{y}_{i+1} = C_0 e^{\mathbf{L}\Delta t} - \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \quad (43)$$

Подставляя начальные условия C_0 из уравнения (42), линейное решение ДУЗ на дискретном интервале времени Δt запишется как:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= e^{\mathbf{L}\Delta t} \mathbf{y}_i + e^{\mathbf{L}\Delta t} \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}) - \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}) = \\ &= e^{\mathbf{L}\Delta t} \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} (e^{\mathbf{L}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \end{aligned} \quad (44)$$

Следует отметить, что если определитель матрицы \mathbf{L} равен нулю ($|\mathbf{L}| = 0$) и \mathbf{L}^{-1} не существует, то \mathbf{y}_{i+1} следует вычислять, используя численное интегрирование, по формуле:

$$\mathbf{y}_{i+1} = e^{\mathbf{L}\Delta t} \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{L}(\Delta t-s)} ds \mathbf{R} (\mathbf{y}_{i-m+1} + \mathbf{y}_{i-m}). \quad (45)$$

Для нахождения значения \mathbf{y}_{i+1} на текущем шаге дискретизации ($i+1$) необходимо знать значение на предыдущем шаге \mathbf{y}_i и значения, запаздывающие на один период вращения шпинделя T , т.е. \mathbf{y}_{i-m} и \mathbf{y}_{i-m+1} .

Значения переменных состояния \mathbf{y} в дискретных интервалах времени могут быть выражены в матричной форме:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{B} \mathbf{Y}_{i-1} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (46)$$

В выражении (46) символом \mathbf{I} обозначена единичная матрица, а символом \mathbf{O} – матрица, заполненная нулями.

Первая строка в этой матрице соответствует уравнению (44), а остальные представляют собой просто равенства $y_{i-2} = y_{i-2}y_{i-2} = y_{i-2}$, ..., $y_{i-m} = y_{i-m}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_{i-(m-1)} \\ y_{i-m} \end{bmatrix}}_{Y_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{L\Delta t} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_{i-m} \\ y_{i-(m+1)} \end{bmatrix}}_{Y_{i-1}} + \\ + \frac{1}{2}(e^{L\Delta t} - \mathbf{I})L^{-1}\mathbf{R} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_{i-m} \\ y_{i-(m+1)} \end{bmatrix}}_{Y_{i-1}}.$$

ДУЗ, которое описывает динамику ортогонального резания, дискретизируется во времени на m интервалов и представляется в виде системы уравнений (46). Оценка каждой вибрации y_i в момент времени $t = i\Delta t$ требует значение вибрации на предыдущем шаге y_{i-1} , вибрации на предыдущем обороте шпинделя ($y_{i-m} \rightarrow t_{i-m} = t_i - m\Delta t = t_i - T$), и на шаге непосредственно перед ним ($y_{i-(m+1)} \rightarrow t_{i-(m+1)} = t_i - (m+1)\Delta t = t_i - T - \Delta t$). Другими словами, системе необходимо «помнить» вибрации на предыдущем обороте. Следовательно, для решения системы (46) необходимо знать m начальных значений вибраций, вызванных на предыдущем обороте шпинделя, но они неизвестны. Однако, так как переходные колебания в конечном счете затухнут, в качестве начальных условий можно принять значения равные статическим отклонениям, вызванные силой резания, т.е. $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{\dot{x}} = 0$, $\ddot{\dot{\dot{x}}} = 0$.

Точность решения зависит количества m шагов дискретизации, приходящихся на один оборот шпинделя. Шаг дискретизации должен быть меньшим, чем половина периода колебаний, т.е. $\Delta t \leq \frac{\pi}{\omega_c}$ и $m \geq 2$.

Поскольку матрица \mathbf{B} не зависит от времени и постоянна для заданной частоты вращения шпинделя и толщины среза, дискретизированная система уравнений (46) может использоваться для определения устойчивости течения, путем проверки её собственных значений:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{B}\mathbf{Y}_{i-1} \rightarrow |\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{B}| = 0 \quad (47)$$

Если хотя бы одно из собственных значений λ матрицы \mathbf{B} , находится за пределами единичной окружности, т.е. $|\lambda| > 1$, система будет неустойчивой и будут возникать регенеративные колебания [9]. Если матрица \mathbf{B} зависит от времени, то для анализа устойчивости необходимо анализировать собственные значения матрицы Φ , называемой матрицей монодромии системы (31) (теорема Флоке, [9]):

$$\Phi = \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{B}_{m-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_1 \quad (48)$$

Лепестковая диаграмма устойчивости строится путем перебора значений скорости вращения шпинделя n [об/с] ($T = 1/n$) с шагом Δn , и ширины срезаемого слоя (глубины резания) a [м], с шагом Δa . Лепестковая диаграмма устойчивости, построенная методом полудискретизации показана на рис. 6. В этой диаграмме число шагов по n равно 200, по a – 150, и разрешение периода составляет $m = 200$. Метод полудискретизации достаточно затратный с точки зрения времени вычислений. Но его преимущества проявляются тогда, когда анализируется устойчивость обработки с зависящей от времени матрицей \mathbf{B} , например обработка с переменной толщиной стружки (фрезерование) или резание с модулированием скорости вращения шпинделя. Однако для простоты рассмотрения особенностей метода полудискретизации в этой статье он использован для анализа устойчивости ортогонального точения.

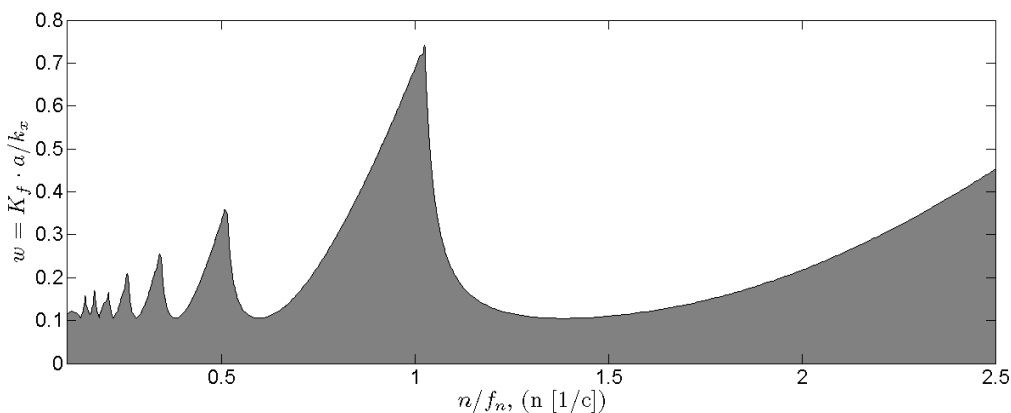


Рис. 6. Лепестковая диаграмма устойчивости, построенная методом полудискретизации

Последним, рассматриваемым в этом обзоре методов построения диаграмм устойчивости, является метод полной дискретизации [10]. Основным отличием метода полной дискретизации от метода полудискретизации, является следующее. В методе полудискретизации аппроксимируется только слагаемое с запаздыванием $y(t-T)$ на интервале $t \in [t_i, t_{i+1})$. В методе полной дискретизации аппроксимируются слагаемое $y(t)$, а также коэффициенты \mathbf{R} и \mathbf{L} (см. уравнение (31)) В работе [10] рассматривается применение метода полной дискретизации для построения диаграмм устойчивости при фрезеровании. Поэтому уравнение динамики резания рассматривается в виде:

$$\dot{y}(t) = \mathbf{A}_0 y(t) + \mathbf{A}(t) y(t) + \mathbf{R} y(t-T), \quad (49)$$

где \mathbf{A}_0 – матрица коэффициентов, не зависящих от времени и $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T)$ – матрица периодических коэффициентов, \mathbf{R} – матрица коэффициентов, аналогичная матрице \mathbf{R} в уравнении (30).

В случае токарной обработки \mathbf{A} не зависит от времени. Для системы с одной степенью свободы и ортогонального точения коэффициенты \mathbf{A}_0 и \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_n^2 \frac{K_f}{k_x} a & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_n^2 \frac{K_f}{k_x} a & 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Заметим, что если сложить \mathbf{A}_0 и \mathbf{A} , то получим $\mathbf{L} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}$ и уравнение (49) станет аналогичным уравнению (31).

Опуская подробности вывода уравнений метода полудискретизации (подробнее см. [10]), запишем итоговое выражение для \mathbf{V}_i .

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} [1 - \Gamma_{i+1}]^{-1} (\Gamma_0 + \Gamma_{0,1}) & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & [1 - \Gamma_{m+1}]^{-1} \Gamma_{m-1} & [1 - \Gamma_{m+1}]^{-1} \Gamma_m \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \dot{\mathbf{O}} & \dot{\mathbf{O}} & \dot{\mathbf{O}} & \dot{\mathbf{O}} & \dot{\mathbf{O}} & \dot{\mathbf{O}} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

где:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Psi_0. \\ \Gamma_{0,1} &= \left(\frac{\Psi_2}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_0^{(i)} + \left(\frac{\Psi_3}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_1^{(i)}. \\ \Gamma_{k+1} &= \left(\Psi_1 - \frac{\Psi_2}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_0^{(i)} + \left(\Psi_2 - \frac{\Psi_3}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_1^{(i)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{m-1} &= \left(\Psi_1 - \frac{\Psi_2}{\Delta t} \right) \mathbf{R}_0^{(i)} + \left(\Psi_2 - \frac{\Psi_3}{\Delta t} \right) \mathbf{R}_1^{(i)} . \\
 \Gamma_m &= \left(\frac{\Psi_2}{\Delta t} \right) \mathbf{R}_0^{(i)} + \left(\frac{\Psi_3}{\Delta t} \right) \mathbf{R}_1^{(i)} . \\
 \mathbf{R}_1^{(i)} &= \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}}{\Delta t} \mathbf{R}_1^{(i)} = \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}}{\Delta t} . \\
 \mathbf{A}_1^{(i)} &= \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_{i+1}}{\Delta t} \mathbf{A}_1^{(i)} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_{i+1}}{\Delta t} . \\
 \Psi_2 &= \int_0^{\Delta t} \xi e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi \Psi_2 = \int_0^{\Delta t} \xi e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi \Psi_2 = \int_0^{\Delta t} \xi e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi \Psi_2 = \int_0^{\Delta t} \xi e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi , \\
 \Psi_3 &= \int_0^{\Delta t} \xi^2 e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi \Psi_3 = \int_0^{\Delta t} \xi^2 e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi \Psi_3 = \int_0^{\Delta t} \xi^2 e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi \Psi_3 = \int_0^{\Delta t} \xi^2 e^{\mathbf{A}_0 \xi} d\xi . \quad (52)
 \end{aligned}$$

Если $|\mathbf{A}_0| \neq 0$, выражения для Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \mathbf{A}_0^{-1} (\Psi_0 - \mathbf{I}) . \\
 \Psi_2 &= \mathbf{A}_0^{-1} (\Delta t \Psi_0 - \Psi_1) . \\
 \Psi_3 &= \mathbf{A}_0^{-1} (\Delta t^2 \Psi_0 - 2\Psi_2) . \quad (53)
 \end{aligned}$$

На рис. 7 показана диаграмма устойчивости, построенная методом полной дискретизации. В этой диаграмме число шагов по n равно 200, по a – 150, и разрешение периода составляет $m = 200$. Она практически совпадает с диаграммой, построенной методом полудискретизации (рис. 6), отличаясь, немного менее четкими границами. Время, затрачиваемое на построение диаграммы методом полной дискретизации, примерно в 2 раза меньше, чем время на построение методом полудискретизации.

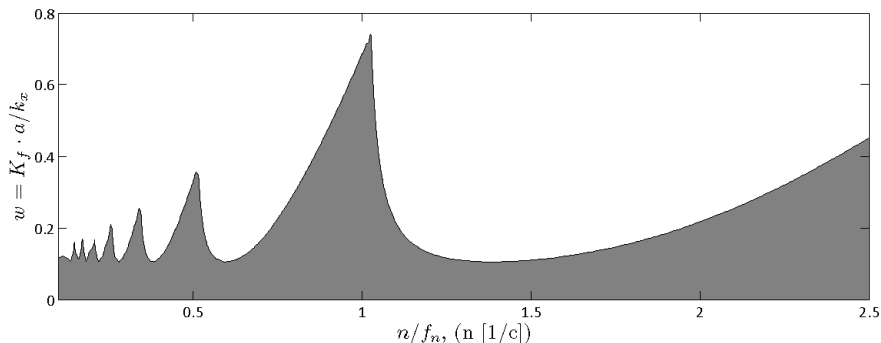


Рис. 7. Лепестковая диаграмма устойчивости, построенная методом полной дискретизации

Выводы. В статье рассмотрены наиболее распространенные методы построения диаграмм устойчивости для простого случая ортогонального резания и технологической системы, моделируемой колебательной системой с одной степенью свободы. Каждый из методов имеет свои особенности, достоинства и недостатки. Сфера их применения зависит от конкретного случая и вида обработки. Методы анализа устойчивости обработки рассмотрены довольно подробно, для того, чтобы можно было воспроизвести построение диаграмм без использования дополнительных источников. Кроме того, для удобства, используется единые обозначения для всех методов.

На основе данной статьи планируется подготовить обзоры по построению диаграмм устойчивости для фрезерной обработки, точения с переменной скоростью резания и учету демпфирования процессом резания при анализе виброустойчивости обработки.

Література

1. Altintas, Y. Chatter stability of metal cutting and grinding / Y. Altintas, M. Weck // {CIRP} Annals - Manufacturing Technology. – 2004. – Vol. 53, No. 2. – P. 619–642.
2. Altintas, Y. Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and cnc design / Y. Altintas. – Cambridge University Press, 2012. – 381 p.
3. Insperger, T. Semi-discretization for time-delay systems – stability and engineering applications / T. Insperger, G. Stépán. – Springer, 2011. – 174 p.
4. Воронов, А. А. Теория автоматического управления. часть 1. теория линейных систем автоматического управления / А. А. Воронов. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 p.
5. Tlustý, J. Beispiele der behandlung der selbsterregten schwingung der werkzeugmaschinen / J. Tlustý, H. Poláček. – Munich : Fo Ko Ma, Hanser Verlag, 1957.
6. Tobias, S. A. A theory of regenerative chatter / S. A. Tobias, W. Fishwick // The Engineer. – 1958. – Vol. 205. – P. 139–239.
7. Merrit, H. E. Theory of self-excited machine tool chatter / H. E. Merrit // ASME Journal of Engineering for Industry. – 1965. – Vol. 87. – P. 447–454.
8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 546 p.
9. Йосс, Ж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Ж. Йосс, Д. Джозеф. – М. : Мир, 1983. – 301 p.
10. Ding, Y. A full-discretization method for prediction of milling stability / Y. Ding, L. Zhu, X. Zhang, H. Ding // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2010. – Vol. 50, No. 5. — P. 502–509.